MINISTERE DE L'EQUIPEMENT — E.I. T.P.E. 1975

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(temps accordé : 3 heures)

On appelle perturbation d'une matrice carrée A d'ordre n une matrice de la forme εB où ε est un scalaire arbitrairement petit et B une matrice carrée d'ordre n. Le but du problème est de comparer les valeurs propres de A et de $A + \varepsilon B$.

Remarque : Les questions sont largement indépendantes.

1°) Soit $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\qquad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

Montrer que les valeurs propres de $A_1 + \varepsilon B_1$ sont

$$\begin{cases} 1 + k_1 \varepsilon + o(\varepsilon) \\ 2 + k_2 \varepsilon + o(\varepsilon) \end{cases}$$ pour ε suffisamment petit (1)

2°) Soit $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

Montrer que les valeurs propres de $A_2 + \varepsilon B_2$ sont pour ε suffisamment petit

$$\begin{cases} 1 + k'_1 \sqrt{\varepsilon} + o(\sqrt{\varepsilon}) \\ 1 + k'_2 \sqrt{\varepsilon} + o(\sqrt{\varepsilon}) \end{cases}$$

3°) On considère la matrice sur le corps des réels :

$$A_3 = \left[\begin{array}{c|c} \alpha & {}^t b \\ \hline b & \begin{matrix} \beta_1 & & \\ & \ddots & 0 \\ 0 & & \beta_{n-1} \end{matrix} \end{array}\right]$$

où b est un vecteur colonne d'ordre $n-1$
${}^t b$ est un vecteur ligne ayant les mêmes composantes que b ; (c'est le transposé de b)
α est un scalaire

On suppose que toutes les coordonnées de b sont différentes de 0 et que les β_i sont tous distincts.

(1) $o(\varepsilon^n)$ désignant une fonction de ε telle que $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{o(\varepsilon^n)}{\varepsilon^n} = 0$

3.1. Montrer que les valeurs propres de A_3 satisfont à l'équation

$$\alpha - \lambda - \sum_i \frac{b_i^2}{\beta_i - \lambda} = 0 \qquad \text{où } b = \begin{bmatrix} b_1 \\ | \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$$

on posera $f(\lambda) = \lambda + \sum_i \frac{b_i^2}{\beta_i - \lambda}$

3.2. Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction $y = f(x)$
Si on suppose que les β_i d'une part et les λ_i, valeurs propres de A_3, d'autre part sont rangés en ordre croissant, montrer que l'on a

$\lambda_1 < \beta_1 < \lambda_2 < \beta_2 \ldots\ldots < \lambda_{n-1} < \beta_{n-1} < \lambda_n$ et que ceci est vrai pour toute valeur de α.

3.3. Avec $B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{bmatrix}$

λ'_i désignant les valeurs propres de $A_3 + \varepsilon B_3$ rangées en ordre croissant, i désignant l'indice de la valeur propre comprise entre β_{i-1} et β_i (avec la convention $\beta_0 = -\infty$ et $\beta_n = +\infty$) montrer que $\forall i \quad |\lambda_i - \lambda'_i| \leqslant |\varepsilon|$.

4°) Soit les matrices $A_4 = \begin{bmatrix} n & n & & & \\ & n-1 & n & & 0 \\ & & n-2 & n & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & 0 & & & n \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$

et $B_4 = \begin{bmatrix} & & \\ & 0 & \\ 1 & & \end{bmatrix}$ 1 en $(n, 1)$
0 ailleurs

4.1. Montrer que le polynome caractéristique de $A_4 + \varepsilon B_4$ s'écrit

$$P(\lambda) = (n-\lambda)(n-1-\lambda)\ldots\ldots(1-\lambda) + (-1)^{n-1} n^{n-1} \varepsilon$$

4.2. Montrer que pour ε suffisamment petit P admet pour racines

$i + K_i \varepsilon + o(\varepsilon) \quad \forall i \quad 1 \leqslant i \leqslant n$ avec $K_i = \frac{(-1)^{n-i} n^{n-1}}{(n-i)!(i-1)!}$

4.3. Soit $|K_p| = \inf_i |K_i|$

Quelle est la valeur de p ?

Montrer que quand $n \longrightarrow \infty \quad |K_p| \longrightarrow \infty$. Que peut-on en conclure sur la validité du calcul précédent ?

5°) Soit $A_5 =$

$$\begin{bmatrix} n & n-1 & n-2 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ n-1 & n-1 & n-2 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ & n-2 & n-2 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ & & n-3 & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & 3 & 2 & 1 \\ & & 0 & & 2 & 2 & 1 \\ & & & & & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

de terme général a_{ij} avec a_{ij}

$$\begin{cases} = n - j + 1 & \text{lorsque } j \geqslant i \\ = n - j & " \quad j = i - 1 \\ = 0 & " \quad j < i - 1 \end{cases}$$

5.1. Calculer le déterminant de A_5

5.2. Soit $B_5 =$

$$\begin{bmatrix} & & 1 \\ & 0 & \\ & & \end{bmatrix}$$

1 en (1, n)

0 ailleurs

Calculer le déterminant de $A_5 + \varepsilon B_5$.

5.3. Que peut-on en conclure sur les valeurs propres de $A_5 + \varepsilon B_5$ par rapport à celles de A_5 pour n suffisamment grand.

6°) Soit **A** une matrice diagonalisable et H la matrice de passage correspondante. Soit B une matrice de perturbation.

6.1. Si μ est valeur propre de $A + \varepsilon B$ et si les λ_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ sont les valeurs propres de **A** , montrer que, hormis le cas particulier où μ est aussi valeur propre de **A**, la matrice

$$I + \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_i - \mu} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\lambda_n - \mu} \end{bmatrix} \varepsilon H^{-1} . B . H$$

est singulière, c'est-à-dire de noyau non réduit à 0 .

6.2. Si $N(X) = \sqrt[2]{t_{XX}}$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ et si **M** est une matrice (n, n), dont on note les éléments M_{ij} montrer que pour $X \neq 0$ $\frac{N(MX)}{N(X)}$ admet une majoration indépendante de X.

On définit alors sur l'espace des matrices (n, n) la fonction

$$N(M) = \sup_{X \neq 0} \frac{N(MX)}{N(X)}$$

Déduire de cette définition que $N(MX) \leqslant N(M) \cdot N(X)$
et que $N(MM') \leqslant N(M) \cdot N(M')$

6.3. Montrer que si $I + P$ est singulière, $N(P) \geqslant 1$.

6.4. En déduire que $\inf |\lambda_i - \mu| \leqslant |\varepsilon| N(H) \cdot N(H^{-1}) \cdot N(B)$. Comment ce résultat se simplifie-t-il pour une matrice A symétrique ?

Rapprocher ce résultat de celui de la question 3.3.

6.5. Montrer que $N(M)$ est une norme sur l'espace des matrices (n, n).

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail